ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1
Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 133.

Α2.
Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 51.

Α3.
Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 185.

Α4.
α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$D_f = (1, +\infty) \qquad D_g = [2, +\infty)$$
$$x \in D_g \Rightarrow x \geq 2$$

και

$$g(x) \in D_f \Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Rightarrow x > 2$$

άρα

$$D_{f \circ g} = (2, +\infty)$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln\left(g(x) - 1\right)$$
$$= 2\ln\left(\sqrt{x-2} + 1 - 1\right) = 2\ln\sqrt{x-2} = 2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\ln(x-2) = \ln(x-2), \quad x > 2$$

B2.

$$h(x) = \ln(x-2), \quad x > 2$$

Η h είναι παραγωγίσιμη για κάθε x > 2 με

$h'(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0$ για κάθε x>2

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (2, +∞), άρα 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Έστω:

$$h(x) = y \Rightarrow \ln(x-2) = y \Rightarrow x - 2 = e^y, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$x = e^y + 2, \quad y \in \mathbb{R}$$

Αφού $h^{-1}(y) = x$, άρα

$$h^{-1}(y) = e^y + 2, \quad y \in \mathbb{R}$$

οπότε

$$h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

B3.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-2)\cdot 2\ln(x-1)}{x-2}$$

Θέτουμε:

$$x - 2 = y \Rightarrow x = y + 2$$

$$\gamma\iota\alpha \text{ x>2 } \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0 \text{ οπότε y} \to 0^+$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-2)\cdot 2\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln y \cdot 2\ln(y+1)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \ln y \cdot 2 \cdot \frac{\ln(y+1)}{y} = -\infty$$

όπου:

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(y+1)}{y} \overset{\frac{0}{0},\ \mathrm{DLH}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{y+1}}{1} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y+1} = 1$$

$$\lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞, άρα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

$$\frac{kx^3+\mu x}{x^2+1} = f(x) \Rightarrow kx^3+\mu x = f(x)(x^2+1) \Leftrightarrow$$

x≠0

$$k = \frac{f(x)\cdot(x^2+1)-\mu x}{x^3} \Rightarrow$$

$$k = \frac{x^2\left(f(x)+\dfrac{f(x)}{x^2}-\dfrac{\mu}{x}\right)}{x^3} \Rightarrow$$

$$k = \frac{f(x)+\dfrac{f(x)}{x^2}-\dfrac{\mu}{x}}{x}$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\dfrac{f(x)}{x^2}-\dfrac{\mu}{x}}{x} = 0$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{f(x)}{x^2}-\frac{\mu}{x}\right) = \ell+\ell\cdot 0-\mu\cdot 0 = \ell$$

άρα **k = 0**

Για κ= 0, είναι:

$$f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$$

που έχει εφαπτομένη την y = x στην αρχή των αξόνων. Άρα ισχύουν:

$$f'(0) = 1 \quad \text{και} \quad f(0) = 0$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2+1)-\mu\cdot x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(x^2+1)-2\mu x^2}{(x^2+1)^2}$$

Από τη συνθήκη f′(0) = 1 προκύπτει:

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Rightarrow \mu = 1$$

Άρα:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

Γ2

i) Έστω:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad x\in\mathbb{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε x ∈ ℝ και:

$$f'(x)=\frac{(x)'(x^2+1)-x\,(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Λύνουμε f′(x) = 0 :

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\ \Rightarrow\ 1-x^2=0\ \Rightarrow\ x^2=1\ \Rightarrow\ x=1 \text{ ή } x=-1$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της f′ και η μονοτονία της f:

x	**−∞**	**−1**	**1 +∞**
f′(x)	−	+	−
f(x)	↘	↗	↘
	Τ.ελ	Τ.μ	

Άρα η f έχει στο x = −1 τοπικό ελάχιστο:

$$f(-1)=-\frac{1}{2}$$

και στο x = 1 τοπικό μέγιστο:

$$f(1)=\frac{1}{2}$$

ii) Σύνολο τιμών.

Στο διάστημα (−∞, −1] η f είναι γν.φθίνουσα, με:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=0$$

οπότε:

$$A_1 = f((-\infty,\ -1]) = \left[-\frac{1}{2},\ 0\right)$$

Στο [−1, 1] η f είναι γν. αύξουσα, άρα:

$$A_2 = f([-1, 1]) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Στο [1, +∞) η f είναι γν.φθίνουσα, με:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

οπότε:

$$A_3 = f([1,\ +\infty)) = \left(0,\ \frac{1}{2}\right]$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι:

$$f(A) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Εξετάζουμε την εξίσωση:

$$f(x) = \frac{1}{2} + a^2$$

- Αν α≠ 0, τότε:

$$\frac{1}{2} + a^2 > \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \frac{1}{2} + a^2 \notin f(A)$$

άρα η εξίσωση δεν έχει καμία λύση.

- Αν α = 0, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

και έχει μοναδική λύση την x = 1 (μοναδική θέση τ.μ της f).

Γ3

Θεωρούμε:

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx$$

Υπολογίζουμε το άθροισμα δύο διαδοχικών όρων:

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

Υπολογίζουμε το I_0 :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Για ν = 0 η σχέση δίνει:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{1}{2} - I_0 \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Για ν = 1 η σχέση δίνει:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; I_2 = \frac{1}{4} - I_1$$

$$I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

ισχύουν:

$$0 < g(x) < 1, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$
$$g'(x) \neq -1, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = g(x) + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η h είναι συνεχής στο [−1, 0] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Επιπλέον, από τη σχέση (1):

$$h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \quad (\text{αφού } g(-1) < 1)$$
$$h(0) = g(0) > 0 \quad (\text{αφού } g(0) > 0)$$

Άρα:

$$h(-1) \cdot h(0) < 0$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano για την h στο [−1, 0], υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε:

$$h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0, \quad x_1 \in (-1, 0)$$

Μοναδικότητα: Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες x_1, ρ_2

$h(x_1) = h(\rho_2) = 0$, $x_1, \rho_2 \in (-1,0)$ $x_1 < \rho_2$

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, \rho_2] \subseteq [-1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, ρ_2), με $h(x_1) = h(\rho_2) = 0$. Από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$. Όμως:

$$h'(x) = g'(x) + 1$$
$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 1 = 0 \Rightarrow g'(\xi) = -1$$

που είναι άτοπο, λόγω της σχέσης (2). Άρα η ρίζα x_1 είναι μοναδική.

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,(g(x)+x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\,\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - kx, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad , \; k \in \mathbb{R}$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (−∞, π/2), θα είναι και στο $x_0 = 0$. Άρα η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$$

Επιπλέον, για να είναι παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Υπολογίζουμε το αριστερό πλευρικό όριο:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(g(x)+x)}{x} = 0 \cdot g(0) = 0$$

και το δεξιό πλευρικό όριο:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - kx}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - k\right)$$

$$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - k = 3 - k$$

Από την ισότητα των πλευρικών ορίων:

$$3 - k = 0 \;\Rightarrow\; k = 3$$

Δ3 i. Να δείξετε ότι f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [0, π/2).

Για k = 3 η f γράφεται:

$$f(x) = 2\,\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}), \quad (k=3)$$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [0, π/2) (αφού είναι στο (−∞, π/2)), με:

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3x-2\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x+1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2x(\sigma\upsilon\nu x-1)-(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2x}$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)\,(2\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x-1)}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x-1)(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2x}$$

$$=\frac{(2\sigma\upsilon\nu x+1)(\sigma\upsilon\nu x-1)^2}{\sigma\upsilon\nu^2x}>0 \quad \text{στο } (0,\tfrac{\pi}{2}),\ \text{αφού } 0<\sigma\upsilon\nu x<1$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, π/2) και για κάθε x ∈ [0, π/2) ισχύει:

$$0\le x<\tfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ f(0)\le f(x)\ \Rightarrow\ 0\le f(x)$$

Δ3 ii. Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$3f(x)=\pi\ \Leftrightarrow\ f(x)=\frac{\pi}{3}$$

Από το Δ3 i, η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο [0, π/2), άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f([0,\tfrac{\pi}{2}))=\left[f(0),\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)$$

Όπου:

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)=+\infty$$

αφού:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\varepsilon\varphi x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\eta\mu x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=+\infty$$

με:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\eta\mu x=1>0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sigma\upsilon\nu x=0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu x>0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$$

Τελικά:

$$f([0,\tfrac{\pi}{2}))=[0,\ +\infty)$$

Επειδή π/3 ∈ f([0, π/2)), υπάρχει x_2 ∈ [0, π/2) τέτοιο ώστε:

$$\frac{\pi}{3} \in f([0,\tfrac{\pi}{2})) \Rightarrow \exists x_2 \in [0,\tfrac{\pi}{2}) : f(x_2) = \frac{\pi}{3}$$

Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_2 είναι μοναδικό.

Δ4.

I

Από το Δ1, για $x \in [x_1, 0]$ είναι:

$$f(x) = x^2\, h(x), \quad x \in [x_1, 0], \qquad \text{όπου } \; h(x) = g(x) + x, \; x \in \mathbb{R}$$

Λύνουμε την εξίσωση f(x) = 0:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ή } h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = x_1$$

αφού από το Δ1 η h έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$.

Η h είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $(x_1, 0]$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Επειδή:

$$h(0) = g(0) > 0$$

είναι h(x) > 0 στο $[x_1, 0]$, ενώ $x^2 > 0$ στο $(x_1, 0)$.

Τελικά:

$$f(x) \geq 0, \quad x \in [x_1, 0]$$

με την ισότητα να ισχύει για $x = x_1$ και x = 0.

II Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x = x_1$ και x = π/3.

Από τα προηγούμενα ισχύει:

$$f(x_2) = \frac{\pi}{3}, \qquad f(x_1) = 0$$

Στο $[x_1, 0]$ είναι f(x) ≤ 0 και στο [0, π/3] είναι f(x) ≥ 0, οπότε:

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|\, dx = \int_{x_1}^{0} |f(x)|\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\, dx = \int_{x_1}^{0} x^2\,(g(x) + x)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx$$

(από Δ4ι και Δ3ι f(x)>0 στο $[x_1, 0]$.και στο [0,π/3] αντίστοιχα)

Υπολογίζουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα (τριγωνομετρικό μέρος):

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \Big(2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x\Big)dx$$

$$= \Big[-2\sigma\upsilon\nu x + \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Υπολογίζουμε το πρώτο ολοκλήρωμα με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_{x_1}^{0} x^2\,(g(x)+x)\,dx = \int_{x_1}^{0} \Big(\frac{x^3}{3}\Big)'(g(x)+x)\,dx$$

$$= \Big[\frac{x^3}{3}\,(g(x)+x)\Big]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,(g'(x)+1)\,dx$$

(Ο πρώτος όρος μηδενίζεται, αφού από το Δ1 ισχύει $g(x_1) + x_1 = 0$:))

$$\frac{x_1^3}{3}\,(g(x_1)+x_1) = 0 \quad (\text{αφού } g(x_1)+x_1 = 0)$$

Άρα:

$$= 0 - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,(g'(x)+1)\,dx = -\int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,g'(x)\,dx - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,dx$$

$$= -\int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,g'(x)\,dx - \Big[\frac{x^4}{12}\Big]_{x_1}^{0} = -\int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,g'(x)\,dx + \frac{x_1^4}{12}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη ($E(\Omega) = 1 + \ln 2 - \pi^2/6$ από το άθροισμα):

$$1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} = -\int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,g'(x)\,dx + \frac{x_1^4}{12}$$

$$\int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{12} + \frac{\pi^2}{6} - \ln 2 - 1$$

$$\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3\, g'(x)\, dx = \frac{x_1^4}{12} + \frac{\pi^2}{6} - \ln 2 - 1$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας με 3:

$$\int_{x_1}^{0} x^3\, g'(x)\, dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$