**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**
**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΥΠΟΤΡΟΦΙΩΝ**
**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΟιδαΝικώ**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΜΑΪΟΥ 2017**

## ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Λάθος

Α2. 1.Γ 2.Α 3.Β

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**

$$A(x)=\frac{x^3+x^2-9x-9}{(x^3-x)\cdot(x-3)}=\frac{x^2(x+1)-9(x+1)}{x(x^2-1)\cdot(x-3)}=\frac{(x^2-9)(x+1)}{x(x-1)(x+1)(x-3)}=$$
$$=\frac{(x-3)(x+3)(x+1)}{x(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{x+3}{x(x-1)}$$

$$B(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+2x}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)x}{x(x-1)x(x+2)(x+1)}=\frac{x-2}{x}$$

**Β2.** Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x\neq 0,\pm1,3,-2$,

$$A(x)+B(x)=\frac{4}{x^2-x}\Leftrightarrow\frac{x+3}{x(x-1)}+\frac{x-2}{x}=\frac{4}{x^2-x}\Leftrightarrow$$
$$x(x-1)\frac{x+3}{x(x-1)}+x(x-1)\frac{x-2}{x}=x(x-1)\frac{4}{x(x-1)}\Leftrightarrow$$
$$x+3+(x-1)(x-2)=4\Leftrightarrow x+3+x^2-2x-x+2=4\Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

η οποία απορρίπτεται, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

**Β3.** $A(2)=\frac{2+3}{2(2-1)}=5$ και $B(3)=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$.

**Β4.**

$$\Gamma=\left(\sqrt{2\mathrm{A}(2)}-3\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+9\mathrm{B}(3)\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{2\frac{5}{2}}-3\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+9\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{5}^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot3\sqrt{5}+\left(3\sqrt{5}\right)^2=$$

$$5-6\sqrt{10}+18+2+6\sqrt{10}+45=70$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**

$$f(-4)=-1\Leftrightarrow\sqrt{(-4)^2+\lambda(-4)+4}-3=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{20-4\lambda}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt{20-4\lambda}\right)^2=2^2\Leftrightarrow 20-4\lambda=4\Leftrightarrow\lambda=4$$

**Γ2.**

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}-3$$

Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει

$x^2+4x+4\geq 0\Leftrightarrow (x+4)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε .

$x\in \mathrm{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}$.

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}-3=\sqrt{(x+2)^2}-3=|x+2|-3.$$

**Γ3.**

$$f(x)=0\Leftrightarrow|x+2|-3=0\Leftrightarrow|x+2|=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=3\\x+2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=-5\end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής με τον x΄x είναι Α(1,0) και Β(-5,0)

$$f(0)=|0+2|-3=-1$$

Άρα το σημείο τομής με τον y΄y είναι Γ(0,-1).

**Γ4.**

$$\frac{f(x)+3}{2}-\frac{f(x)+4}{3}\le 2 \Leftrightarrow 6\frac{f(x)+3}{2}-6\frac{f(x)+4}{3}\le 6\cdot 2 \Leftrightarrow$$
$$3\big(f(x)+3\big)-2\big(f(x)+4\big)\le 12 \Leftrightarrow f(x)\le 11 \Leftrightarrow |x+2|-3\le 11 \Leftrightarrow$$
$$|x+2|\le 14 \Leftrightarrow -14\le x+2\le 14 \Leftrightarrow -16\le x\le 12$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** $\Delta=(-2\lambda)^2-4(\lambda-2)(\lambda+1)=4\lambda^2-4\left(\lambda^2-\lambda-2\right)=4\lambda+8$

**Δ2.** $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\lambda+8>0 \Leftrightarrow \lambda>-2$

Άρα $\lambda\in(-2,2)\cup(2,+\infty)$

**Δ3.**

$$(\lambda-2)^2\left(x_1^2x_2+x_1x_2^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2\, x_1x_2\left(x_1+x_2\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-2)^2\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda-2}\cdot\frac{2\lambda}{\lambda-2}\ge 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2\cdot\frac{2\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-2)^2}\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+1)\ge 0 \Leftrightarrow \lambda\le -1 \text{ ή } \lambda\ge 0$$

Όμως επειδή $\lambda\in(-2,2)\cup(2,+\infty)$

Τελικά, $\lambda\in(-2,-1]\cup[0,2)\cup(2,+\infty)$.

**Δ4.** Για να αληθεύει η ανίσωση για κάθε $x\in R$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$ πρέπει,

$$\begin{cases}\Delta\le 0\\ \lambda-2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda\le -2\\ \lambda<2\end{cases} \Leftrightarrow \lambda\le -2$$